Μαθημα 24ο 12/11/2018

Διαφ. Εξισωσεις

Ασκησεις

Ασκηση 1, ii, σελ. 248

$$\begin{cases} y'' - 2xy' + 2y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad x_0 = 0 \end{cases}$$

Σκεφτομαι 1ο ή 2ο κεφ. που αν δε μου ταιριαζει πουω σε δυναμοσειρα

Θυμαμαι
Για να δω αν το σημειο ειναι ομαλο ή ανωμαλο εξεταζω αν $\frac{a_1(x)}{a_2(x)}$, $\frac{a_0(x)}{a_2(x)}$ αναλυτικες γυρω απο το x_0
↳ αναπτυσσουν δυναμοσειρα

$a_2(x) = 1$ Ακτινες συγκλισης

$a_1(x) = 2x$ $R_1 = +\infty$, $R_2 = +\infty$

$a_0(x) = 2$ $R = \min\{R_1, R_2\} = +\infty$

Το σημειο x_0 ομαλο σημειο

$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, $x \in \mathbb{R}$, $\underbrace{c_0 = 0, \ c_1 = 1}_{\text{ειναι γνωστα}}$

$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}$

$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n \cdot n(n-1) x^{n-2}$

Κανω αντικατασταση στην (E)

Δημιουργω ιδιο ειδεται παντα

$0 = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n} =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2} (n+2)(n+1) x^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left[c_{n+2}(n+2)(n+1)-2(n-1)c_n\right]x^n+2c_2+2c_0=0$$

Άρα $2c_2=-2c_0 \Rightarrow c_2=0$

$$c_{n+2}=\frac{2(n-1)\cdot c_n}{(n+2)(n+1)}, \quad n\geq 1$$ ← όπου έχει που ξεκινά το άθροισμά μου

(I) $n=2k$

$$c_{2(k+1)}=\frac{\cancel{2}(2k-1)\,c_{2k}}{\cancel{2}(k+1)(2k+1)}, \quad k\geq 1$$

$k=1$: $c_4=\dfrac{\cancel{c_2}^{\to 0}}{2\cdot 3}=0$ καλό είναι να το κάνω για τα δύο πρώτα όπως $k=1$, $k=2$ αν ξεκινάει π.χ. από $k\geq 5$ τότε $k=5$, $k=6$

$k=2$: $c_6=\dfrac{3\cancel{c_4}^{\to 0}}{3\cdot 5}=0$ → τα κάνω πολλ/μο $c_{2(k+1)}\cdot c_4\cdot c_6\cdot\ldots$

Άρα $c_{2(k+1)}=0, \quad k\geq 1$

$c_{2n}=0, \quad n\geq 2$ είτε γράψω $n\geq 2$ είτε $n\geq 1$ δεν αλλάζει τίποτα αλλά στο τέλος θα θέλω αναλυτικά τον τύπο

Συνεπώς $c_{2n}=0, \quad n\geq 1$

(II) $n=2k+1$

$$c_{2(k+1)+1}=\frac{2\cdot \cancel{2}k\; c_{2k+1}}{(2k+3)(k+1)\cdot \cancel{2}}, \quad k\geq 0$$

$k=0$: $c_3=0$

άρα $c_{2n+1}=0, \quad n\geq 1$ αφού $k\geq 0$ τότε $n\geq 1$

Λύση $y(x)=c_0+c_1\cdot x+\sum_{n=1}^{\infty}0\cdot x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}0\cdot x^{2n+1} \Rightarrow$

$y(x)=x, \quad x\in\mathbb{R}$

Ασκηση 3, ii, σελιδα 248

$$\begin{cases} y'' - (x^2+2x+1)y' - (2x+2)y = 0 \\ y(-1) = y'(-1) = 2 \end{cases}$$

Αναστασταση $t = x - a$, $a = -1$, $t = x+1$ αρα $dt = dx$

$y'' - (x+1)^2 y' - 2(x+1)y = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dt}{dx}$$

Εχω να λυσω το εξης προβλημα αρχικων τιμων

$$\begin{cases} y'' - t^2 y' - 2ty = 0 \\ y(0) = y'(0) = 2 \end{cases}$$

Συντελεστες: $a_2(t) = 1$

$a_1(t) = -t^2$

$a_0(t) = -2t$

$\frac{a_1(t)}{a_2(t)}$, $\frac{a_0(t)}{a_2(t)}$ → ειναι πολυωνυμα

αναλυτικες γυρω απο το $t_0 = 0$

Ακτινες συγκλισης $R_1 = +\infty$, $R_2 = +\infty$

$R = \min\{R_1, R_2\} = +\infty$

Το $t_0 = 0$ ομαλο

Γνωστα $c_0 = c_1 = 2$

Scanned by CamScanner

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \quad , \; t \in \mathbb{R}$$

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot n\, t^{n-1}$$

$$y''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n \cdot n(n-1)\, t^{n-2}$$

Κάνω αντικατάσταση στην εξίσωση

$$0 = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n t^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n t^{n+1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+1} =$$

$$= \sum_{n=-1}^{\infty} (n+3)(n+2) c_{n+3} t^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} (n+2) c_n t^{n+1} - 2c_0 t =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+3)(n+2) c_{n+3} - (n+2) c_n\right] t^{n+1} - 2c_0 t + 2c_2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \\ c_3 = \dfrac{c_0}{3} = \dfrac{2}{3} \\ c_{n+3} = \dfrac{c_n}{n+3} \;, \; n \geq 1 \end{cases}$$

• $n = 3k$

$$c_{3(k+1)} = \frac{c_{3k}}{3(k+1)} \;, \; k \geq 1$$

$k=1$: $\quad c_6 = \dfrac{c_3}{3 \cdot 2}$

$k=2$: $\quad c_9 = \dfrac{c_6}{3 \cdot 3}$

$$c_{3(k+1)} = \frac{c_3}{3^k (k+1)!} = \frac{2}{3^{k+1} (k+1)!}$$

Scanned by CamScanner

$$C_{3n} = \frac{2}{3^n\, n!}, \quad n \geq 2 \Rightarrow \boxed{C_{3n} = \frac{2}{3^n\, n!}, \quad n \geq 1}$$

• $n = 3\kappa+1$

$$C_{3(\kappa+1)+1} = \frac{C_{3\kappa+1}}{3(\kappa+1)+1}, \quad \kappa \geq 0$$

$\kappa=0: \quad C_4 = \frac{C_1}{4}$

$\kappa=1: \quad C_7 = \frac{C_4}{7}$

αρα $\quad C_{3(\kappa+1)+1} = \frac{C_1}{4 \cdot 7\, [3(\kappa+1)+1]}, \quad \kappa \geq 0$

$$\boxed{C_{3n+1} = \frac{2}{4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n+1)}, \quad n \geq 1}$$

Εχω $\quad C_{n+3} = \frac{C_n}{n+3}, \quad n \geq 1$

• $n = 3\kappa+2$

$$C_{3(\kappa+1)+2} = \frac{C_{3\kappa+2}}{3(\kappa+1)+2}, \quad \kappa \geq 0$$

$\kappa=0: \quad C_5 = \frac{C_2}{5} = 0$

αρα $\quad \boxed{C_{3n+2} = 0, \quad n \geq 1}$

Οποτε $\quad y(t) = 2 + 2t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n n!} t^{3n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4 \cdot 7 \cdot \ldots (3n+1)} t^{3n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} 0$

στην αρχη ειχα $t = x+1$ αρα λαω αντικατασταση για να δω

$y(x) = \ldots$

Εβαλα μεσα το $\lambda+2k$ σε μηδεν παντα χρειαζεται ελεγχος

$$\Rightarrow y(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{3^n n!}t^{3n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{4\cdot 7\cdots(3n+1)}t^{3n+1}$$

Ασκηση 2, ν, σελ 265

$xy''+xy'+y=0 \quad , \; x_0=0$

Να βρεθουν δυο γραμ. ανεξ. λυσεις

$a_2(x)=x$

$a_1(x)=x$

$a_0(x)=1$

p_0 σταθ. ορος

$A_1(x)=\frac{x\cdot x}{x}=x$

Ειναι αναλυτικες γυρω απο το 0 αρα το σημειο μας $x_0=0$ κανονικο ιδιαζον σημειο

$A_2(x)=\frac{x^2\cdot 1}{x}=x$

q_0 σταθ. ορος

Ακτινες $R_1=+\infty$, $R_2=+\infty$ και $R=\min\{R_1,R_2\}=+\infty$

$p_0=0 \;, \; q_0=0$

Εξισωση: $\lambda^2+(p_0-1)\lambda+q_0=0 \Rightarrow \lambda^2-\lambda=0 \Rightarrow \lambda(\lambda-1)=0$

Ριζες $\lambda_1=1 \;, \; \lambda_2=0$

που το λεει το θεωρημα

Λυσεις $y_1(x)=|x|\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n \quad , \; c_0=1 \quad , \; x\in\mathbb{R}$

Εργαζομαι για $x>0$

$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+1}$

$y_1'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(n+1)x^n$

$y_1''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cdot n(n+1)x^{n-1}$

Κάνω αντικατάσταση στην εξίσωση

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot n(n+1) x^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n(n+1) x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+1} =$$

→ το κάνω $n+1$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}(n+1)(n+2) x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+2) x^{n+1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[C_{n+1}(n+1)(n+2) + C_n(n+2) \right] x^{n+1} \Rightarrow$$

έχω n και $n+1$ δηλ. τον επόμενο όρο δε χρειάζεται να κάνω υπακολουθίες $2k, 2k+1$ κ.α.τ.

$$C_{n+1} = \frac{-C_n}{n+1}, \quad n \geq 0$$

$n=0$: $\quad C_1 = -\frac{C_0}{1} = -C_0 = -1$

$n=1$: $\quad C_2 = -\frac{C_1}{2} = \frac{1}{2}$

άρα $\quad C_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} C_0}{(n+1)!} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \Rightarrow$

$$C_n = \frac{(-1)^n}{n!}, \quad n \geq 1$$

Άρα λύση είναι

$$y_1(x) = |x| \underbrace{\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \right]}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = e^{-x}$$

άρα $\quad y_1(x) = |x| e^{-x}$

Θέλουμε τώρα την y_2 για να έχω 2 γρ. ανεξ. λύσεις δηλ. είναι ΒΣΛ

$\lambda_1 - \lambda_2 = 1 \in \mathbb{N}$ (είμαι στην 3η περίπτωση)

Απο το θεωρημα εχω

$$y_2(x) = C|x|e^{-x}\log|x| + \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$$

Για $x>0$

$$y_2(x) = cxe^{-x}\log x + \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

$$y_2'(x) = ce^{-x}\log x - cxe^{-x}\log x + ce^{-x} + \sum_{n=1}^{\infty} n d_n x^{n-1}$$

$$y_2''(x) = -2ce^{-x}\log x + \frac{ce^{-x}}{x} + cxe^{-x}\log x - 2ce^{-x} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) d_n x^{n-2}$$

Κανω αντικατασταση

$$\cancel{-2cxe^{-x}\log x} + ce^{-x} + \cancel{cx^2e^{-x}\log x} - 2cxe^{-x} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) d_n x^{n-1} + \cancel{2cxe^{-x}\log x} -$$

$$- \cancel{cx^2e^{-x}\log x} + \cancel{cxe^{-x}} + \sum_{n=1}^{\infty} n d_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n = 0$$

$$c\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} - c\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)n d_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n d_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n = 0$$

$$c + d_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{c(-1)^n}{n!} - \frac{c(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + (n-1)\cdot n \cdot d_{n+1} + (n+1) d_n\right] x^n = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} c + d_0 = 0 \Rightarrow c = -d_0 = -1 \\ d_{n+1} = \dfrac{\dfrac{(-1)^n}{n!} + \dfrac{(-1)^n}{(n-1)!} - (n+1) d_n}{(n+1)n}, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Αρα $y_1(x) = |x|e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$

$$y_2(x) = -|x|e^{-x}\log|x| + \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$$

$d_0 = 1$, $d_1 \in \mathbb{R}$